

第1讲倍长中线(加油站)

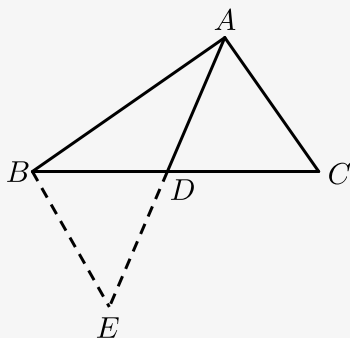
一、倍长中线

练习1

1. 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线, $AB = 12$, $AC = 8$, 则边 BC 及中线 AD 的取值范围分别是 () .
- A. $4 < BC < 20$, $2 < AD < 10$ B. $4 < BC < 20$, $4 < AD < 20$
C. $2 < BC < 10$, $2 < AD < 10$ D. $2 < BC < 10$, $4 < AD < 20$

【答案】A

【解析】如图所示,



在 $\triangle ABC$ 中, 则 $AB - AC < BC < AB + AC$,

即 $12 - 8 < BC < 12 + 8$, $4 < BC < 20$,

延长 AD 至点 E , 使 $AD = DE$, 连接 BE ,

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的中线,

$\therefore BD = CD$,

又 $\angle ADC = \angle BDE$, $AD = DE$,

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle EBD$ (SAS),

$\therefore BE = AC$,

在 $\triangle ABE$ 中, $AB - BE < AE < AB + BE$, 即 $AB - AC < AE < AB + AC$,

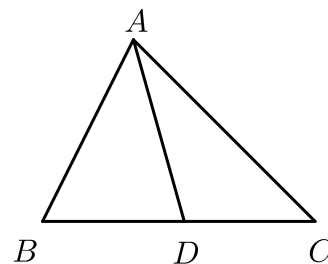
$12 - 8 < AE < 12 + 8$, 即 $4 < AE < 20$,

$\therefore 2 < AD < 10$.

故选A.

【标注】【知识点】倍长中线

2. 在 $\triangle ABC$ 中， AD 是 BC 边上的中线。



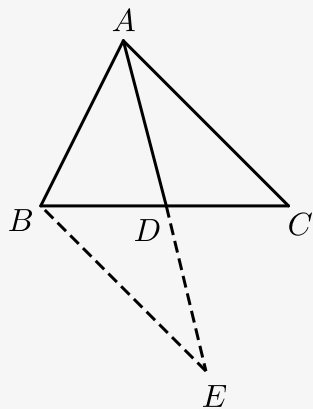
(1) 求证： $AB + AC > 2AD$ 。

(2) 若 $AB = 5$ ， $AC = 9$ ，求 AD 的取值范围。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $2 < AD < 7$ 。

【解析】(1) 延长 AD 到点 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE ，



在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle EDB$ 中，

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ CD = BD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB$ (SAS) ,

$\therefore AC = BE$,

$\therefore AB + AC > 2AD$.

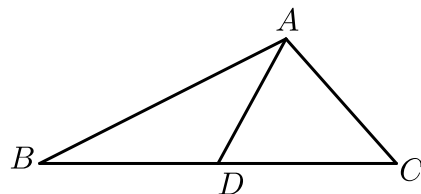
(2) 根据三角形三边关系有： $AC - AB < 2AD < AB + AC$,

$$\therefore 2 < AD < 7.$$

【标注】【知识点】中点类辅助线

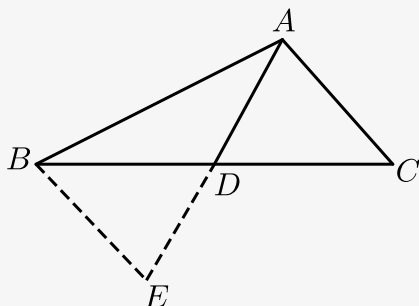
练习2

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $BD = CD$ ， $\angle DAC = \angle B + \angle C$ ，若 $AD = 3$ ，则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】6

【解析】延长 AD 至点 E ，使得 $DE = AD$ ，连接 BE ，



$$\text{在}\triangle ADC\text{与}\triangle EDB\text{中，}\begin{cases} AD = ED \\ \angle ADC = \angle EDB \\ CD = BD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle EDB (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle DAC = \angle E, \angle C = \angle EBD,$$

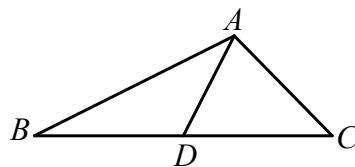
$$\therefore \angle ABE = \angle ABC + \angle EBD = \angle ABC + \angle C, \angle DAC = \angle B + \angle C,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle DAC = \angle E,$$

$$\therefore AB = AE = 2AD = 6.$$

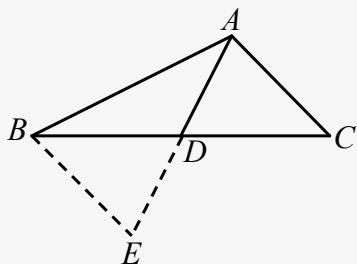
【标注】【知识点】倍长（类）中线

4. 如图 $\triangle ABC$ 中，点 D 为 BC 的中点， $AB = 5$ ， $AC = 3$ ， $AD = 2$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 6

【解析】



延长 AD 至 E ，使 $AD = DE$ ，连接 BE ，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDE$ 中，

$$\begin{cases} AD = DE \\ \angle ADC = \angle EDB, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDE (\text{SAS})$ ，

$\therefore BE = AC = 3$ ，

$\therefore AE = 4$ ， $AB = 5$ ， $3^2 + 4^2 = 5^2$ ，

$\therefore \triangle ABE$ 为 $\text{RT}\triangle$ ， $AE \perp BE$ ，

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BDE$ ，

$\therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDE}$ ，

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle DCA} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABE}$ ，

$\therefore S_{\triangle ABE}$ 为直角三角形，

$$\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} BE \cdot AE$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot (AD + ED)$$

$$= \frac{1}{2} AC \cdot 2AD$$

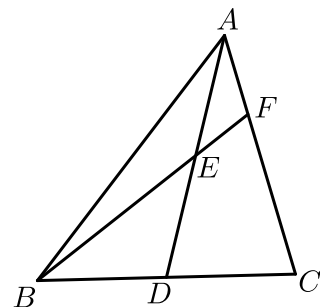
$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times 2$$

$$= 6.$$

故答案为：6.

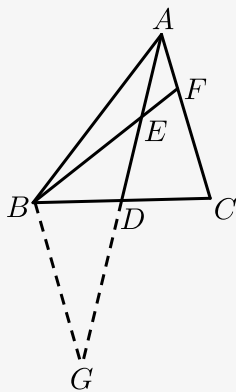
【标注】【知识点】倍长中线

5. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， E 是 AD 上一点，延长 BE 交 AC 于点 F ，若 $EF = AF$ ， $BF = 9$ ， $CF = 6$ ，则 $EF =$ _____.



【答案】 1.5

【解析】 如图，延长AD至点G，使 $DG = AD$ 。



在 $\triangle BGD$ 和 $\triangle CAD$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle BDG = \angle CDA, \\ DG = DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle BGD \cong \triangle CAD (\text{SAS})$,

$\therefore \angle G = \angle DAC$, $BG = CA$,

$\therefore AF = EF$,

$\therefore \angle DAC = \angle AEF$,

又 $\because \angle AEF = \angle BEG$,

$\therefore \angle BEG = \angle DAC = \angle G$,

$\therefore BG = BE$,

$\therefore AC = BE$,

$\therefore BF = BE + EF = 9$,

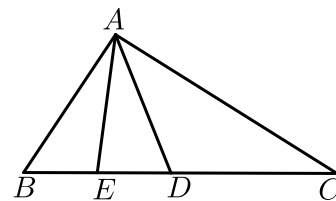
$\therefore AF = AC - FC = BE - CF = 9 - EF - 6 = 3 - EF = EF$,

$\therefore EF = 1.5$.

故答案为：1.5.

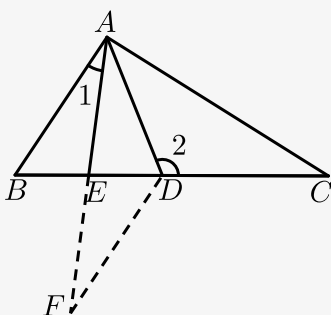
【标注】【知识点】倍长中线

6. 如图，已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，且 $CD = AB$ ， $\angle BDA = \angle BAD$ ， AE 是 $\triangle ABD$ 的边 BD 上的中线，且 $AE = 3$ ．求 AC 的长．



【答案】 6 .

【解析】 延长 AE 至 F 使得 $EF = AE$ ，连接 DF ．



在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle FDE$ 中．

$$\begin{cases} AE = FE \\ \angle AEB = \angle FED \\ BE = DE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FDE (\text{SAS})$ ．

$\therefore AB = DF = DC$ ， $\angle 1 = \angle F$ ，

$\therefore AB \parallel DF$ ．

又 $\because \angle BAD = \angle BDA$ ．

$\angle BAD + \angle ADF = 180^\circ$ ．

$\angle BDA + \angle 2 = 180^\circ$ ．

$\therefore \angle ADF = \angle 2$ ．

在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle ADC$ 中

$$\begin{cases} AD = AD \\ \angle ADF = \angle 2 \\ DF = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ADC (\text{SAS})$$

$$\therefore AC = AF = 2AE = 6.$$

【标注】【知识点】中点类辅助线

练习3

7. 如图，已知 CB 、 CD 分别是钝角 $\triangle AEC$ 和锐角 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AC = AB$ ，给出下列结论：

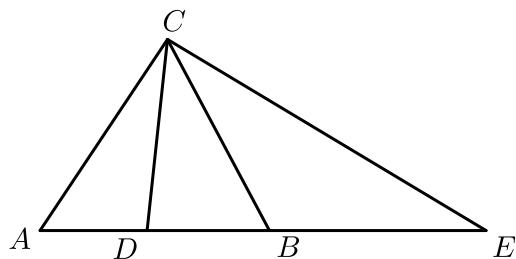
① $AE = 2AC$ ；

② $CE = 2CD$ ；

③ $\angle ACD = \angle BCE$ ；

④ CB 平分 $\angle DCE$ ，

则以上结论正确的是（ ）。



A. ①②④

B. ①③④

C. ①②③

D. ①②③④

【答案】A

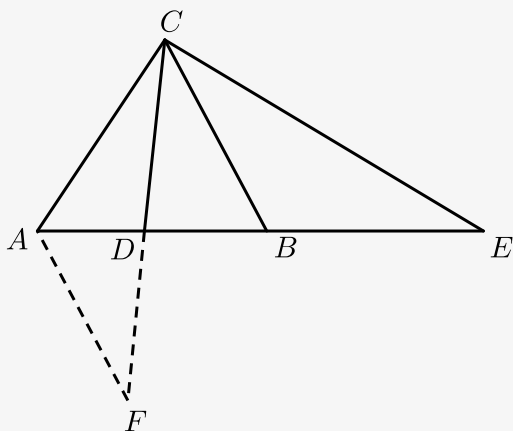
【解析】①正确，延长 CD 至点 F ，使得 $DF = CD$ ，连接 AF ，可先证明 $\triangle ADF \cong \triangle BDC$ ，再证明 $\triangle ACF \cong \triangle BEC$ ，由这两个三角形全等可以得知②、④正确。

由 $\triangle ACF \cong \triangle BEC$ ，得 $\angle ACD = \angle E$ ，若要 $\angle ACD = \angle BCE$ ，则需 $\angle E = \angle BCE$ ，

，

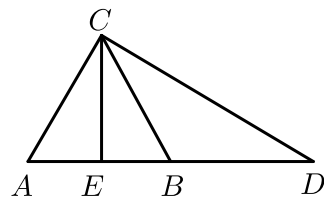
则需 $BC = BE$ ，显然不成立，故③选项错误。

故选A。



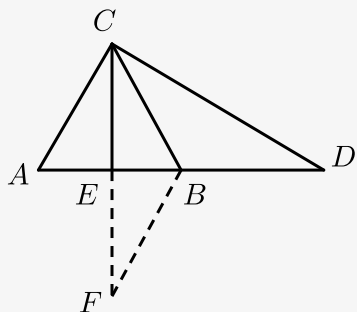
【标注】【知识点】倍长中线

8. 如图， CB 、 CE 分别是 $\triangle ADC$ 、 $\triangle ABC$ 的中线，且 $AC = \frac{1}{2}AD$ ， $\angle ACB = \angle ABC$ 。求证：
 $CD = 2CE$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】



过 B 作 $BF \parallel AC$ 交 CE 的延长线于 F ，

$\because CE$ 是中线， $BF \parallel AC$ ，

$\therefore AE = BE$ ， $\angle A = \angle ABF$ ， $\angle ACE = \angle F$ ，

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BFE$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle ABF \\ \angle ACE = \angle F, \\ AE = BE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BFE (\text{AAS})$,

$\therefore CE = EF, AC = BF$,

$\therefore CF = 2CE$,

又 $\because \angle ACB = \angle ABC$, CB 是 $\triangle ADC$ 的中线,

$\therefore AC = AB = BD = BF$,

$\therefore \angle DBC = \angle A + \angle ACB = \angle ABF + \angle ABC$,

$\therefore \angle DBC = \angle FBC$,

在 $\triangle DBC$ 和 $\triangle FBC$ 中,

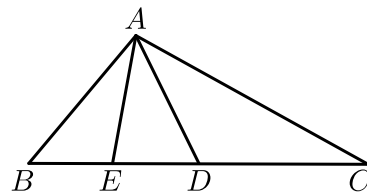
$$\begin{cases} DB = FB \\ \angle DBC = \angle FBC, \\ BC = BC \end{cases}$$

$\therefore \triangle DBC \cong \triangle FBC (\text{SAS})$,

$\therefore DC = CF = 2CE$.

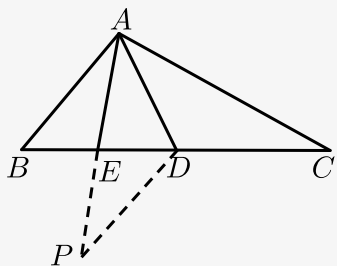
【标注】【知识点】倍长(类)中线

9. 如图, D 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边上一点, 且 $CD = AB$, $\angle BDA = \angle BAD$, AE 是 $\triangle ABD$ 的中线, 求证: $\angle C = \angle BAE$.



【答案】证明见解析.

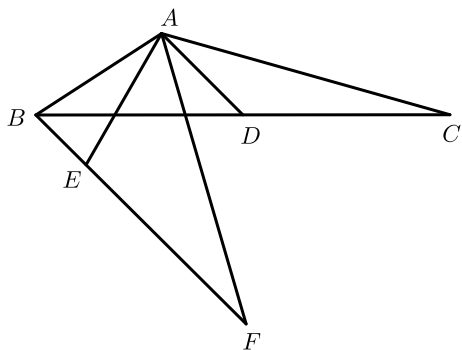
【解析】延长 AE 至 P , 使 $EP = AE$, 连 DP ,



$\triangle AEB \cong \triangle PED$ (SAS) ,
 $\therefore AB = PD = CD$, $AB \parallel DP$,
 $\therefore \angle BAE = \angle P$,
 又 $\because \angle BAD + \angle ADP = 180^\circ$,
 $\angle BDA + \angle ADC = 180^\circ$ 且 $\angle BAD = \angle BDA$,
 $\therefore \angle ADP = \angle ADC$,
 $\therefore \triangle ADP \cong \triangle ADC$ (SAS) ,
 $\therefore \angle C = \angle P = \angle BAE$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

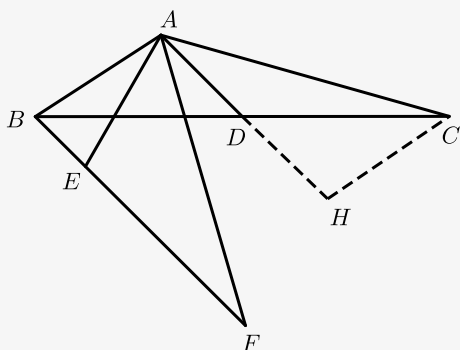
10. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D 为 BC 中点，过 B 作 AD 平行线至点 F ， E 为 BF 上一点，满足 $AB = AE$ 且 $\angle EAF + \angle BAC = 180^\circ$. 证： $2AD = EF$.



【答案】证明见解析 .

【解析】延长 AD 至 H ,

使 $AD = DH$ ，连 CH ，



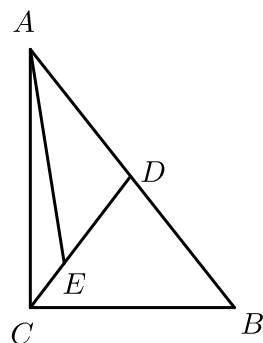
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle HCD,$$

$$\therefore \text{又} \triangle AEF \cong \triangle CHA,$$

$$\therefore AH = EF = 2AD.$$

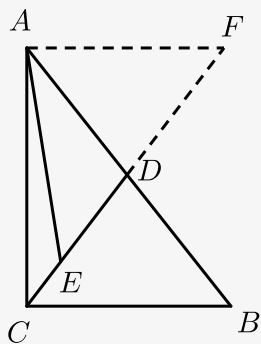
【标注】【知识点】倍长中线

11. 已知：如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC > BC$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， CD 是 $\triangle ABC$ 的中线，点 E 在 CD 上，且 $\angle AED = \angle B$ ．求证： $AE = BC$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】方法一：延长 CD 到 F 使 $DF = CD$ ，连接 AF ，



$\therefore CD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线 ,

$\therefore AD = BD$,

在 $\triangle ADF$ 与 $\triangle BDC$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = BD \\ \angle ADF = \angle BDC , \\ DF = DC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle BDC$ (SAS) ,

$\therefore \angle F = \angle BCD$, $BC = AF$,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$, CD 是 $\triangle ABC$ 的中线 ,

$\therefore CD = BD$,

$\therefore \angle B = \angle BCD$,

$\therefore \angle AED = \angle F$,

$\therefore AE = AF$,

$\therefore AE = BC$.

方法二 : 先证 $\triangle ADF \cong \triangle BDC$,

再证 $\triangle FAC \cong \triangle BCA$,

$\therefore AB = CF$,

$\therefore AB = 2BD$, $CF = 2CD$,

$\therefore CD = BD$,

$\therefore \angle B = \angle BCD$,

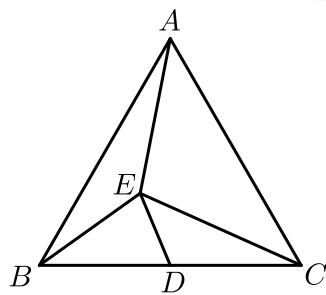
$\therefore \angle AED = \angle F$,

$\therefore AE = AF$,

$\therefore AE = BC$.

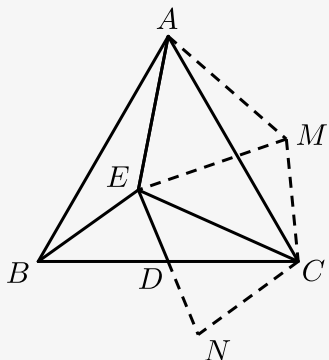
【标注】【知识点】倍长中线

12. 正 $\triangle ABC$ 内一点 E , $\angle BEC = 120^\circ$, D 为 BC 中点 , 连接 EA 、 ED , 求证 : $AE = 2ED$.



【答案】证明见解析 .

【解析】作正 $\triangle AEM$ ，则 $\triangle ABE \cong \triangle ACM$ (SAS)倍长 ED 至 N 连 CN ，



则 $\triangle CND \cong \triangle BED$ (AAS)，则

$$CN = BE,$$

导角得 $\angle ECN = \angle ECM$ ，则

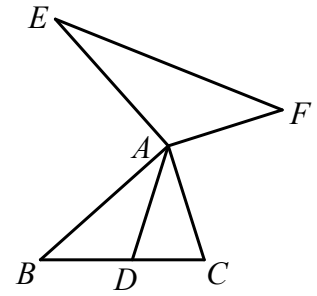
$\triangle ECN \cong \triangle ECM$ (SAS)，则

$$AE = AM = EM = EN = 2ED.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

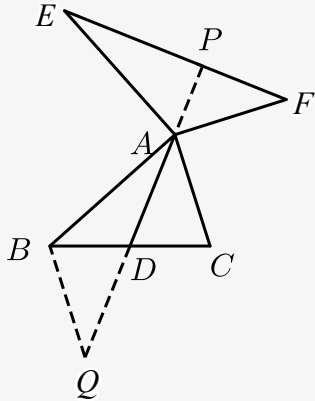
练习4

13. 已知：如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AE \perp AB$ ， $AE = AB$ ， $AF \perp AC$ ， $AF = AC$ ，连接 EF 。
试猜想线段 AD 与 EF 的关系，并加以证明。



【答案】 数量关系： $2AD = EF$ ，位置关系： $AD \perp EF$ ，证明见解析。

【解析】 方法一：延长 AD 至点 Q ，使 $DQ = AD$ ，连接 BQ ，反向延长 AD 交 EF 于 P 。



依题意可知， $AE \perp AB$ ， $AE = AB$ ， $AF \perp AC$ ， $AF = AC$ ，

$\therefore AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$\therefore BD = CD$ ，

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle QDB$ 中，

$$\therefore \begin{cases} AD = QD \\ \angle ADC = \angle QDB \\ DC = DB \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle QDB$ (SAS) .

$\therefore BQ = AC$ ， $\angle DAC = \angle Q$.

$\therefore AC = BQ = AF$ ， $AC \parallel BQ$.

$\therefore \angle BAC + \angle EAF = \angle BAC + \angle ABQ = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABQ = \angle EAF .$$

在 $\triangle ABQ$ 和 $\triangle EAF$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} BA = AE \\ \angle ABQ = \angle EAF , \\ BQ = AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABQ \cong \triangle EAF (SAS) .$$

$$\therefore AQ = EF = 2AD , \angle BAQ = \angle AEF .$$

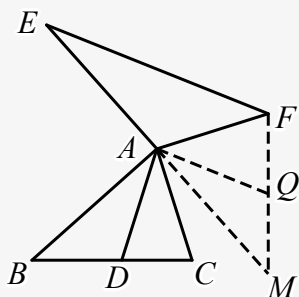
$$\therefore \angle BAQ + \angle EAP = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEF + \angle EAP = 90^\circ ,$$

$$\therefore AD \perp EF .$$

方法二：延长 EA 至点 M ，使 $AM = EA$ ，连接 MF ，

取 MF 的中点 Q ，连接 AQ 。



$$\therefore AE \perp AB , AF \perp AC ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle CAF = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle EAF = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle EAF + \angle MAF = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle MAF .$$

$$\therefore AM = AE = AB , AF = AC ,$$

$$\therefore \triangle BAC \cong \triangle MAF (SAS) .$$

$$\therefore AD \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的中线 , } AQ \text{ 为 } \triangle AMF \text{ 的中线 , } BC \text{ 与 } MF \text{ 为对应边 ,}$$

$$\therefore AD = AQ .$$

$$\text{又 } \because A \text{ 为 } EM \text{ 的中点 , } Q \text{ 为 } FM \text{ 的中点 ,}$$

$$\therefore AQ = \frac{1}{2} EF , AQ \parallel EF .$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2} EF , \text{ 即 } 2AD = EF .$$

$$\text{易证 } \triangle DAC \cong \triangle QAF ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle QAF ,$$

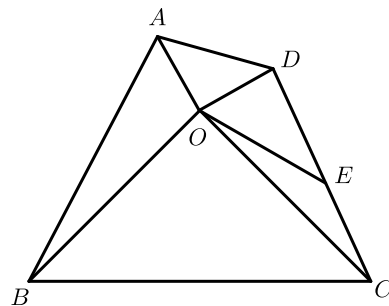
$$\therefore \angle DAQ = \angle DAC + \angle CAQ = \angle CAQ + \angle QAF = \angle CAF = 90^\circ ,$$

$$\therefore AQ \perp AD ,$$

$$\therefore AD \perp EF.$$

【标注】【知识点】中点类辅助线

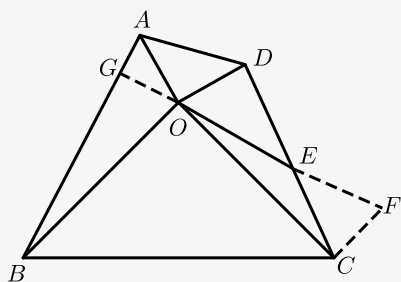
14. 如图，等腰直角 $\triangle AOD$ 和等腰直角 $\triangle BOC$ 中，点 E 为 CD 的中点。试判断 AB 与 OE 的数量关系和位置关系，并证明。



【答案】 $AB = 2OE$ ， $OE \perp AB$ ，证明见解析。

【解析】 $AB = 2OE$ ， $OE \perp AB$ 。

延长 OE 至 F ，使 $EF = OE$ ，连 CF ，



在 $\triangle OED$ 和 $\triangle FEC$ 中，

$$\begin{cases} OE = EF \\ \angle DEO = \angle CEF, \\ DE = CE \end{cases}$$

$\therefore \triangle OED \cong \triangle FEC (\text{SAS})$ ，

$\therefore CF = OD = OA$ ， $\angle ODE = \angle FCE$ ，

$\therefore CF \parallel OD$ ，

$\therefore \angle DOC + \angle OCF = 180^\circ$ ，

$$\therefore \angle AOB + \angle COD = 360^\circ - \angle AOD - \angle BOC = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOB = \angle OCF ,$$

在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle FCO$ 中 ,

$$\begin{cases} OA = CF \\ \angle AOB = \angle FCO , \\ OB = OC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle FCO (\text{SAS}) ,$$

$$\therefore AB = OF ,$$

$$\therefore AB = OE + EF = 2OE ,$$

$$\angle ABO = \angle OCF ,$$

$$\therefore \angle OCF + \angle BOG = 180^\circ - \angle BOC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle BOG + \angle ABO = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle OGB = 90^\circ ,$$

$$\therefore OE \perp AB .$$

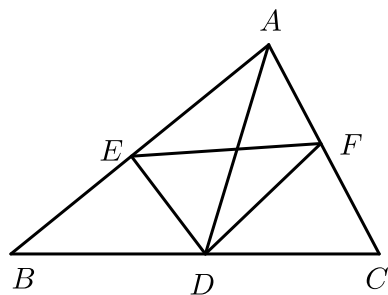
【标注】【知识点】倍长中线

二、倍长类中线

练习5

15. 已知 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线, $\angle ADB$, $\angle ADC$ 的平分线分别交 AB 于 E 、交 AC 于 F . 求证 :

$$BE + CF > EF .$$



【答案】证明见解析

【解析】延长 FD 到 N ，使 $DN = DF$ ，连结 BN 、 EN 。

易证 $\triangle BND \cong \triangle CFD$ ，

$\therefore BN = CF$ ，

又 $\because \angle ADB, \angle ADC$ 的平分线分别交 AB 于 E 、交 AC 于 F ，

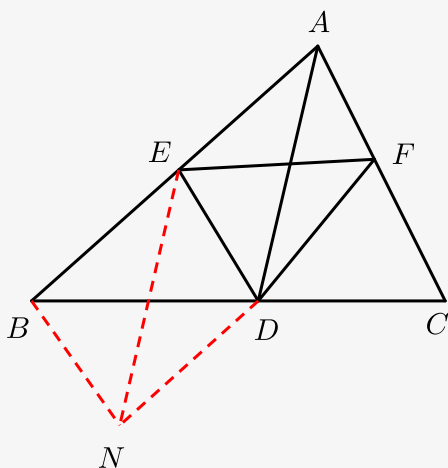
$\therefore \angle EDF = \angle EDN = 90^\circ$ ，

利用SAS证明 $\triangle EDN \cong \triangle EDF$ ，

$\therefore EN = EF$ ，

在 $\triangle EBN$ 中， $BE + BN > EN$ ，

$\therefore BE + CF > EF$ 。



【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

16. 已知： AD 为 $\triangle ABC$ 的中线， $AE = AB$ ， $AF = AC$ ，连接 EF ， $EF = 2AD$ 。

(1) 如图1，求证： $\angle EAF + \angle BAC = 180^\circ$ 。

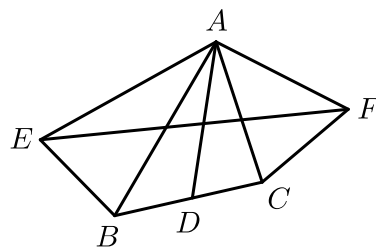


图 1

(2) 如图2，设 EF 交 AB 于点 G ，交 AC 于点 N ，若 $\angle ABC = 60^\circ$ ，点 G 为 EF 中点，延长 EB 、 FC 交于点 M 。请探究 BM 、 BC 之间的数量关系，并证明你的结论。

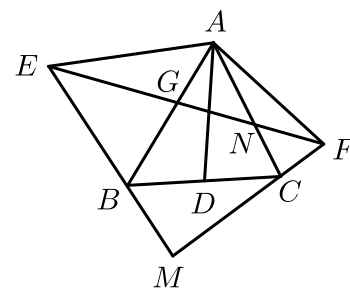


图 2

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $BC = 2BM$, 证明见解析 .

【解析】(1) 如图3, 延长 AD 至 H , 使 $HD = AD$, 连接 CH .

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle HDC$ 中 ,

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle ADB = \angle HDC , \\ AD = HD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle HDC (\text{SAS})$,

$\therefore \angle BAD = \angle CHD$, $AB = HC$,

$\therefore \angle BAC = \angle BAD + \angle CAD = \angle CHD + \angle CAD$,

$\because EF = 2AD$, $HA = 2AD$,

$\therefore EF = HA$,

$\because AE = AB$, $AB = HC$,

$\therefore HC = AE$, 又 $AC = AF$,

在 $\triangle AHC$ 和 $\triangle FEA$ 中 ,

$$\begin{cases} HC = EA \\ AC = FA , \\ AH = FE \end{cases}$$

$\therefore \triangle AHC \cong \triangle FEA (\text{SSS})$,

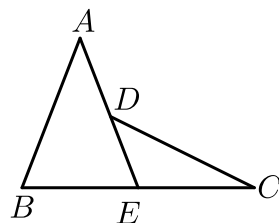
$\therefore \angle EAF = \angle ACH$,

$\because \angle ACH + \angle CHD + \angle CAD = 180^\circ$,

$\therefore \angle EAF + \angle BAC = 180^\circ$.

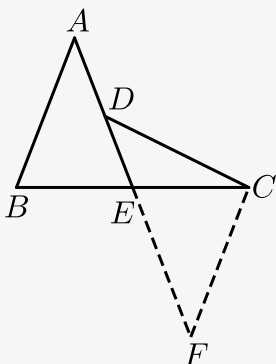
练习6

17. 如图，点 E 为 BC 的中点， D 为线段 AE 上一点，且 $\angle A = \angle CDE$ ，若 $AB = 3$ ，则 $CD =$ _____ .



【答案】 3

【解析】 延长 AE 至点 F ，使得 $EF = AE$ ，连接 CF ，



在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle FCE$ 中，

$$\begin{cases} BE = CE \\ \angle AEB = \angle FEC, \\ AE = FE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE (\text{SAS})$ ，

$\therefore AB = FC = 3$ ， $\angle A = \angle F$ ，

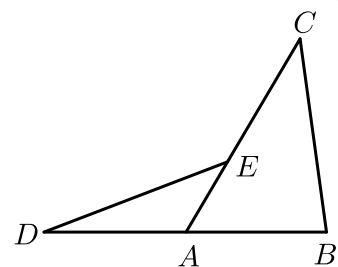
$\because \angle A = \angle CDE$ ，

$\therefore \angle F = \angle CDE$

$\therefore CD = CF = 3$.

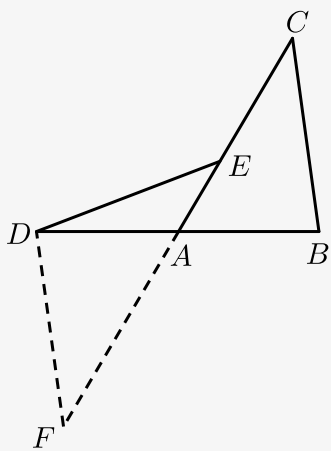
【标注】 【知识点】 倍长（类）中线

18. 已知：如图， D 是 $\triangle ABC$ 的边 BA 的延长线上一点，且 $AD = AB$ ， E 是边 AC 上一点，且 $DE = BC$. 求证： $\angle DEA = \angle C$.



【答案】证明见解析 .

【解析】过点 D 作 BC 的平行线交 CA 的延长线于点 F .



$$\therefore \angle C = \angle F .$$

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ABC$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle F = \angle C \\ \angle DAF = \angle BAC , \\ AD = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADF \cong \triangle ABC (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore DF = BC .$$

$$\therefore DE = BC ,$$

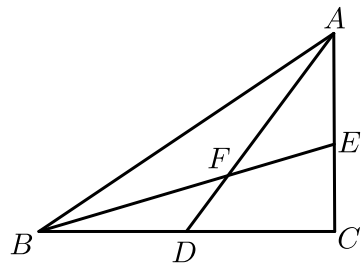
$$\therefore DE = DF .$$

$$\therefore \angle F = \angle DEA .$$

$$\text{又} \because \angle C = \angle F ,$$

$$\therefore \angle C = \angle DEA .$$

19. 如图， AD 为 $\triangle ABC$ 中线，点 E 在 AC 上， BE 交 AD 于点 F ， $AE = EF$ ．求证： $AC = BF$ ．

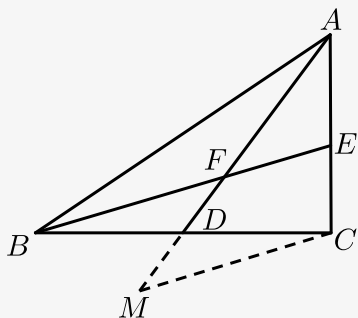


【答案】证明见解析．

【解析】 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线，

$$\therefore BD = CD,$$

延长 AD 至点 M ，使 $MD = FD$ ，连接 MC ，



在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CDM$ 中，

$$\begin{cases} BD = CD \\ \angle BDF = \angle CDM, \\ DF = DM \end{cases}$$

$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CDM (\text{SAS})$ ，

$\therefore MC = BF$ ， $\angle M = \angle BFM$ ，

$\because EA = EF$ ，

$\therefore \angle EAF = \angle EFA$ ，

$\therefore \angle AFE = \angle BFM$ ，

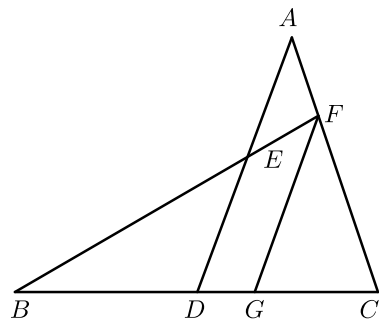
$$\therefore \angle M = \angle MAC ,$$

$$\therefore AC = MC ,$$

$$\therefore BF = AC .$$

【标注】【知识点】倍长（类）中线

20. 如图，在 $\triangle BCF$ 中， FG 交 BC 于点 G ，点 D 是 BC 中点， $AD \parallel FG$ 交 CF 的延长线于点 A ，交 BF 于点 E ，若 $BE = CA$ ，求证： FG 为 $\triangle BFC$ 的角平分线．



【答案】证明见解析．

【解析】如图，延长 AD 至点 H ，使 $DH = DA$ ，连结 BH ，

可证 $\triangle ACD \cong$

$\triangle HBD$ ，

$$\therefore AC = HB ,$$

$$\angle H = \angle A ,$$

$$\therefore BE = CA ,$$

$$\therefore BE = BH ,$$

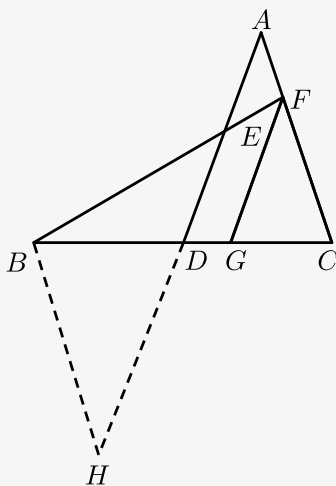
$$\therefore \angle H = \angle BEH ,$$

$$\therefore \angle BEH = \angle AEF$$

,

$$\therefore \angle AEF = \angle A ,$$

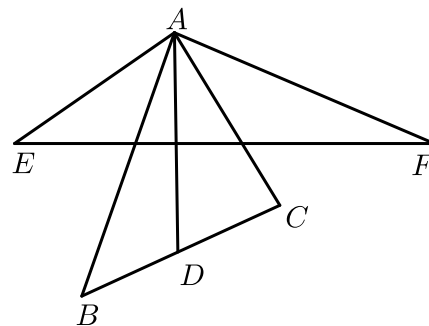
$$\therefore FG \parallel AD ,$$



$$\begin{aligned}\therefore \angle BFG &= \angle AEF, \\ \angle CFG &= \angle A, \\ \therefore \angle BFG &= \angle CFG.\end{aligned}$$

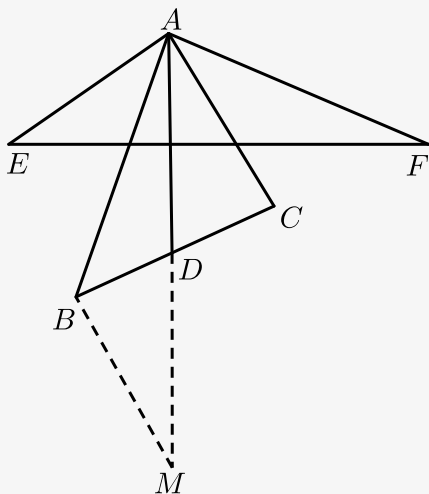
【标注】【知识点】倍长（类）中线

21. 如图， AD 是 $\triangle ABC$ 的中线， $AE \perp AC$ ， $AF \perp AB$ ， $AE = AC$ ， $AF = AB$ ．求证：
 $EF = 2AD$ ， $AD \perp EF$ ．



【答案】证明见解析．

【解析】延长 AD 至 M 使 $AD = DM$ ，连接 BM ，



$$\begin{aligned}\because AD &\text{是} \triangle ABC \text{的中线}, \\ \therefore BD &= CD,\end{aligned}$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle MBD$ 中,

$$\begin{cases} AD = DM \\ \angle BDM = \angle ADC, \\ BD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle MBD$ (SAS),

$\therefore AC = BM = AE, \angle C = \angle MBD,$

$\therefore \angle ABM = \angle ABC + \angle MBD = \angle ABC + \angle C = 180^\circ - \angle BAC,$

$\therefore \angle FAE = 90^\circ + 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC,$

$\therefore \angle ABM = \angle FAE,$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BMA$ 中,

$$\begin{cases} AE = BM \\ \angle FAE = \angle ABM, \\ AF = AB \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BMA$ (SAS),

$\therefore AM = EF, \angle M = \angle E$

$\therefore EF = 2AD.$

$\therefore \angle M = \angle CAD, \angle CAD + \angle EAD = 90^\circ$

$\therefore \angle E + \angle EAD = 90^\circ$

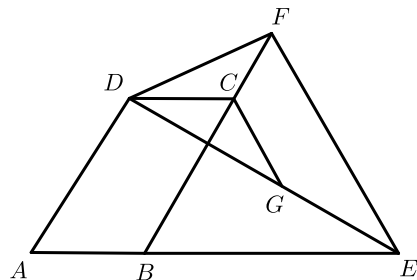
$\therefore AD \perp EF.$

【标注】【知识点】倍长(类)中线

三、平行线 + 中点

练习7

22. 如图, 平行四边形 $ABCD$ 的顶点 C 在等边 $\triangle BEF$ 的边 BF 上, 点 E 在 AB 的延长线上, G 为 DE 的中点, 连接 CG , 若 $AD = 5, AB = CF = 2$, 则 CG 的长为 _____.



【答案】 $\frac{5}{2}$

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore AD = BC, CD = AB, DC \parallel AB.$$

$$\therefore AD = 5, AB = CF = 2,$$

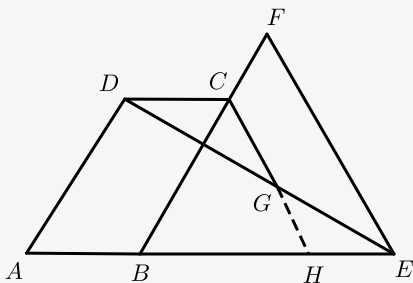
$$\therefore CD = 2, BC = 5,$$

$$\therefore BF = BC + CF = 7.$$

$\because \triangle BEF$ 是等边三角形， G 为 DE 的中点，

$$\therefore BF = BE = 7, DG = EG,$$

延长 CG 交 BE 于点 H ，



$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CDG = \angle HEG.$$

在 $\triangle DCG$ 和 $\triangle EHG$ 中，

$$\begin{cases} \angle CDG = \angle HEG \\ DG = EG \\ \angle DGC = \angle EGH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle EHG (\text{ASA}),$$

$$\therefore DC = EH, CG = HG,$$

$$\therefore CD = 2, BE = 7,$$

$$\therefore HE = 2, BH = 5.$$

$$\therefore \angle CBH = 60^\circ, BC = BH = 5,$$

$\therefore \triangle CBH$ 是等边三角形，

$$\therefore CH = BC = 5,$$

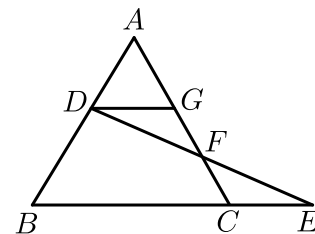
$$\therefore CG = \frac{1}{2}CH = \frac{5}{2}.$$

故答案为： $\frac{5}{2}$ 。

【标注】【知识点】平行四边形与全等综合

23. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AB = BC$ ，点 D 在 AB 边上，过点 D 作 $DG \parallel BC$ ，交 AC 于点 G ，点 F 在边 AC 上，连接 DF 并延长，交 BC 的延长线于点 E ，且 $GF = CF$ 。

求证： $AD = CE$ 。



【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\because DG \parallel BC$,

$$\therefore \angle AGD = \angle BCA , \angle E = \angle GDF , \angle DGF = \angle FCE ,$$

在 $\triangle DGF$ 和 $\triangle ECF$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle GDF = \angle E \\ \angle DGF = \angle FCE , \\ GF = FC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DGF \cong \triangle ECF (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore DG = CE ,$$

$$\because AB = BC ,$$

$$\therefore \angle A = \angle BCA ,$$

$$\therefore \angle A = \angle AGD ,$$

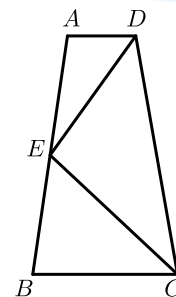
$$\therefore AD = DG ,$$

$$\therefore AD = CE .$$

【标注】 【知识点】 全等三角形的对应边与角

24. 如图 , 梯形 $ABCD$ 中 , $AD \parallel BC$, E 是 AB 的中点 , $DE \perp CE$, $AD = 3$, $CD = 9$, $BC =$

_____ .



【答案】 6

【解析】 延长 DE 交 CB 的延长线于 F ，

$$\therefore AD \parallel CF,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABF, \angle ADE = \angle F.$$

易证 $\triangle AED \cong \triangle BEF$ ，

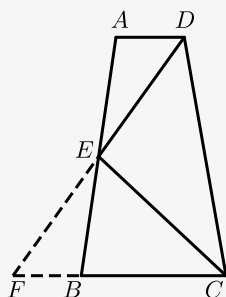
$$\therefore AD = BF, DE = EF,$$

$$\therefore CE \perp DF,$$

$$\therefore CD = CF = BC + BF,$$

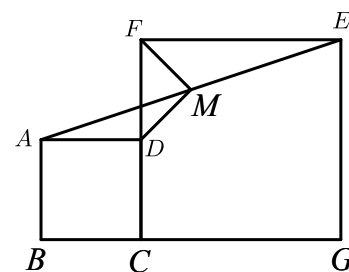
$$\therefore AD + BC = DC.$$

$$\therefore BC = 9 - 3 = 6.$$



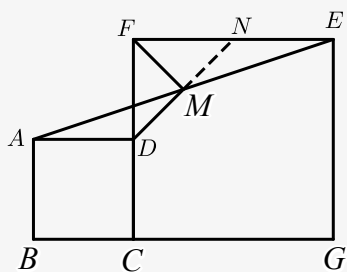
【标注】 【知识点】 利用平行线+中点构造全等

25. 四边形 $ABCD$ 和四边形 $CGEF$ 均为正方形，且 D 在 CF 边上， M 为 AE 中点，连接 MD 、 MF ，证明： $MD \perp MF$.



【答案】证明见解析.

【解析】如图，延长 DM 交 EF 于点 N ，证明 $\triangle ADM \cong \triangle ENM$ ， $DM = NM$ ， $AD = EN$ ，由正方形四边相等，可得 $AD = CD = EN$ ， $CF = EF$ ，进而可得 $CF - CD = EF - EN$ 即 $FD = FN$ ， $\triangle FDN$ 为等腰三角形，又 $DM = NM$ ，利用等腰三角形三线合一，可得 $FM \perp MD$ 。



【标注】【知识点】等腰三角形的性质-三线合一